Examen HAVO

2025

tijdvak 2
donderdag 19 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Raken aan de x-as

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$.

De grafiek van f heeft twee toppen.

De rechter top ligt op de x-as.

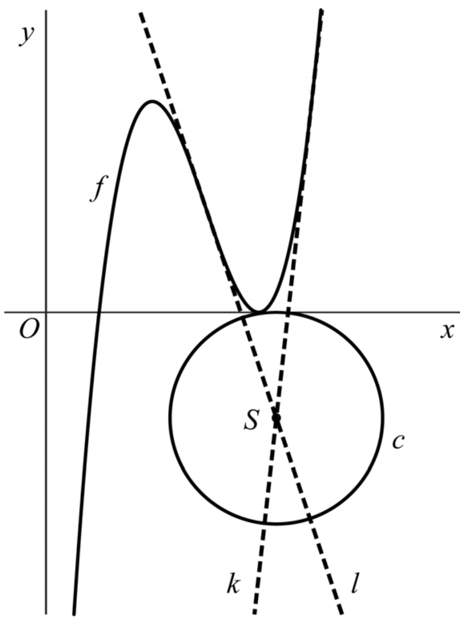
5p **1** Bewijs dit.

Verder worden de volgende twee raaklijnen aan de grafiek van f gegeven:

- lijn k met vergelijking $y = 9x - 41$;
- lijn l met vergelijking $3x + y = 11$.

Lijnen k en l snijden elkaar in punt S.
De cirkel c heeft middelpunt S en raakt de x-as.
Zie de figuur.

figuur



5p **2** Stel op exacte wijze een vergelijking op van cirkel c.

Sloeproeien

Bij een wedstrijd sloeproeien wordt er geroeid in houten sloepen. Zie de foto.

foto

Bij zo'n wedstrijd kunnen de vorm en de grootte van de sloepen en het aantal roeiers per sloep verschillen. Hiermee wordt rekening gehouden bij het bepalen van de uitslag van de wedstrijd.

De sloep waarin het gemiddelde geleverde vermogen P **per roeier** het grootst is, wint. De waarde van P wordt na afloop van de wedstrijd als volgt berekend:

– Eerst wordt op basis van de tijd die een sloep nodig had om de wedstrijdafstand af te leggen de gemiddelde snelheid v van de sloep berekend.

– Daarna wordt voor de sloep een waarde W berekend die aangeeft hoe makkelijk of moeilijk de sloep door het water glijdt. De waarde van W is afhankelijk van de vorm van de sloep en de gemiddelde snelheid van de sloep. Er geldt:

$$W = \frac{A}{1 - B \cdot v^2} \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierin zijn A en B constanten die afhankelijk zijn van de vorm van de sloep en is v de gemiddelde snelheid van de sloep in m/s.

– Ten slotte wordt het gemiddelde geleverde vermogen P per roeier in watt berekend:

$$P = \frac{1}{n} \cdot W \cdot v^3 \qquad \text{(formule 2)}$$

Hierin is n het aantal roeiers in de sloep, W de waarde die volgt uit formule 1 en v de gemiddelde snelheid van de sloep in m/s.

Bij een wedstrijd hebben de roeiers in sloep 1 en sloep 2 een afstand van 17,3 km geroeid. Na afloop van de wedstrijd wordt voor beide sloepen de waarde van P berekend. De sloep met de hoogste waarde wint.
Voor sloep 1 is de waarde van P al berekend. Zie de tabel.

tabel

sloep	n	A	B	v (m/s)	P (watt)
1	8	21,36	0,05	2,62	73,1
2	10	23,04	0,08	…	…

Sloep 2 heeft de afstand van 17,3 km afgelegd in een tijd van 1 uur, 53 minuten en 58 seconden.

4p **3** Onderzoek welk van de twee sloepen de wedstrijd heeft gewonnen.

Stel dat een van de acht roeiers in sloep 1 niet mee roeit maar alleen stuurt en dat voor de overige zeven roeiers het gemiddelde geleverde vermogen P per roeier 73,1 watt blijft. Volgens de formules zou dan de gemiddelde snelheid van deze sloep - met nu dus zeven roeiers - lager zijn dan de 2,62 m/s in de tabel.

3p **4** Bereken de gemiddelde snelheid van sloep 1 in m/s in deze situatie. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

De gemiddelde snelheid v van sloep 1 ligt ook tijdens andere wedstrijden tussen 2 en 3 m/s. Voor de waarde W van sloep 1 geldt:

$$W = \frac{21,36}{1 - 0,05 \cdot v^2} \qquad \text{(formule 3)}$$

Met formule 3 kan voor sloep 1 beredeneerd worden dat hoe groter de waarde van v is, hoe groter de waarde van W is.

3p **5** Geef deze redenering. Het geven van een getallenvoorbeeld of een verwijzing naar een grafiek is niet voldoende.

Een exponentiële functie

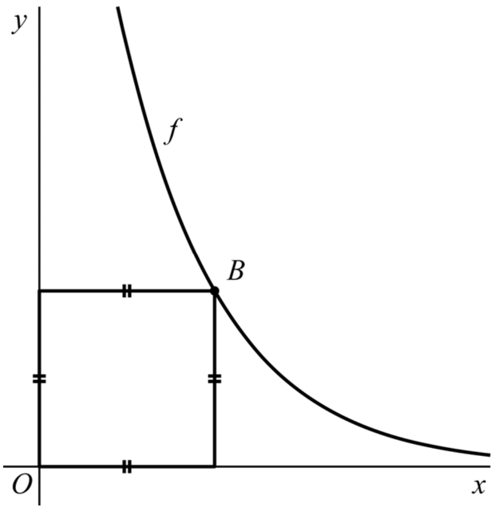
De functie f wordt gegeven door $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$.

Op de grafiek van f ligt punt A met y-coördinaat 4.
De x-coördinaat van A kan geschreven worden in de vorm $x = {}^{p}\log(q)$.

3p **6** Bereken exact mogelijke waarden van p en q.

Op de grafiek van f ligt het punt B zodanig dat B de rechterbovenhoek is van een vierkant waarvan twee zijden samenvallen met de assen.
De oorsprong $O(0,0)$ is de linkeronderhoek van dit vierkant.
Zie de figuur.

figuur



4p **7** Bereken de oppervlakte van het vierkant. Geef je eindantwoord in één decimaal.

De grafiek van f ontstaat door op de standaardgrafiek met formule $y = 3^{x}$ de volgende twee transformaties toe te passen:

- eerst een horizontale verschuiving 2 naar links;
- dan een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met -1.

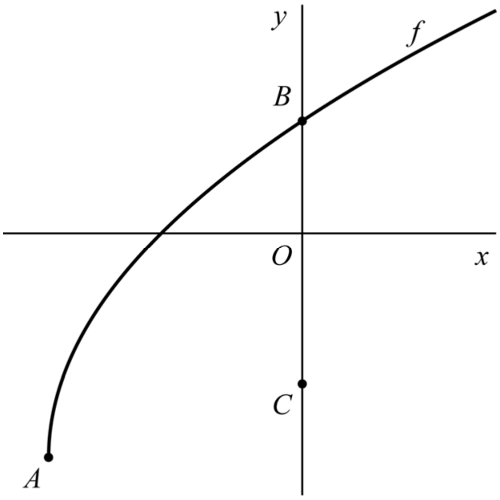
3p **8** Bewijs dat de grafiek van f inderdaad ontstaat door op deze standaardgrafiek de twee genoemde transformaties toe te passen.

Een wortelfunctie

De functie f wordt gegeven door $f(x) = -16 + \sqrt{32x + 576}$.

De grafiek van f heeft randpunt A en snijdt de y-as in het punt B.
Verder is gegeven het punt $C(0; -10{,}75)$. Zie figuur 1.

figuur 1

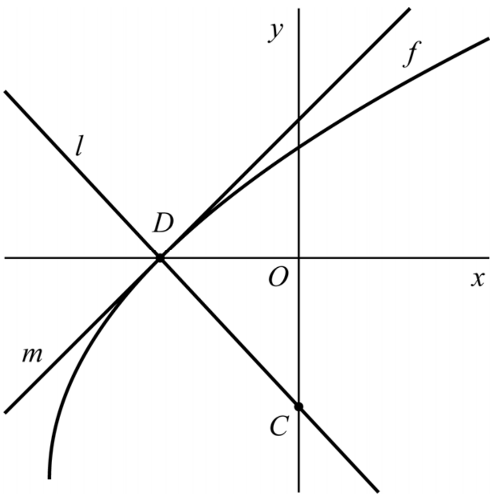


Er geldt: $AC = BC$

6p **9** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De grafiek van f snijdt de x-as in het punt D. De lijn l gaat door de punten C en D en de lijn m raakt de grafiek van f in D. Zie figuur 2.

figuur 2



De hoek tussen l en m is net geen $90°$.

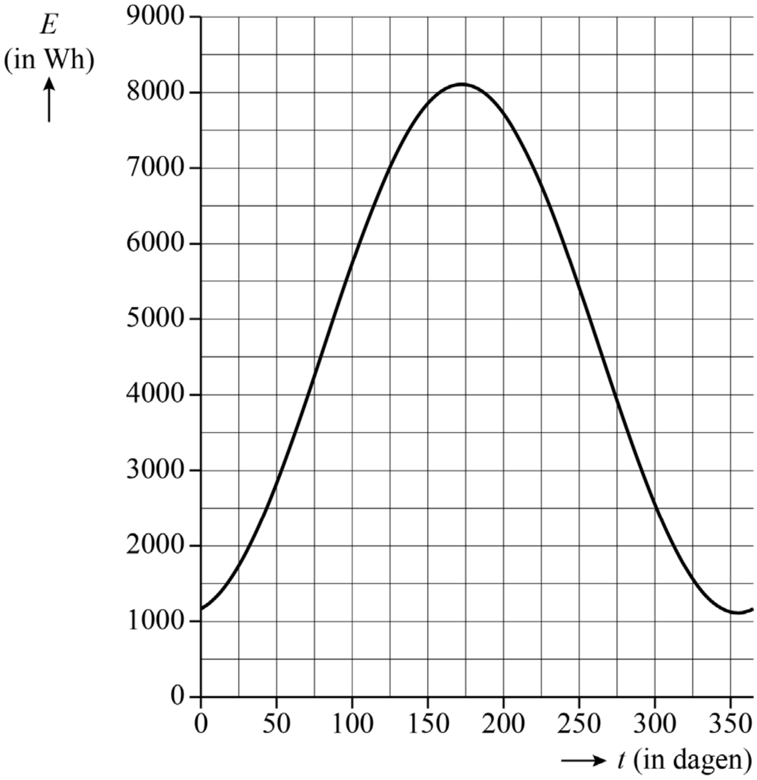
8p **10** Bereken op algebraïsche wijze de scherpe hoek in graden tussen l en m. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Zonnepanelen

De hoeveelheid energie die een zonnepaneel ontvangt, is afhankelijk van de dag in het jaar en de hellingshoek van het paneel.

Gedurende een jaar is door een weerstation elke dag de hoeveelheid ontvangen energie E (in Wh) gemeten. Bij deze metingen is een zo passend mogelijk model opgesteld. In figuur 1 is de bijbehorende grafiek getekend. Hierbij is E uitgezet tegen de tijd t in dagen met $t = 0$ op 1 januari.

figuur 1



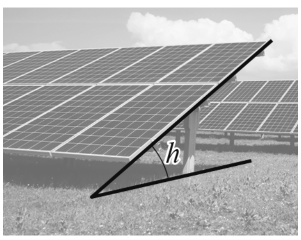
De formule die bij het model hoort heeft een periode van 365 dagen en ziet er als volgt uit:

$$E = p \cdot \sin(q \cdot (t - r)) + s \qquad \text{(formule 1)}$$

5p **11** Bepaal mogelijke waarden van p, q, r en s. Geef de waarde van q in vier decimalen en de waarden van p, r en s als geheel getal.

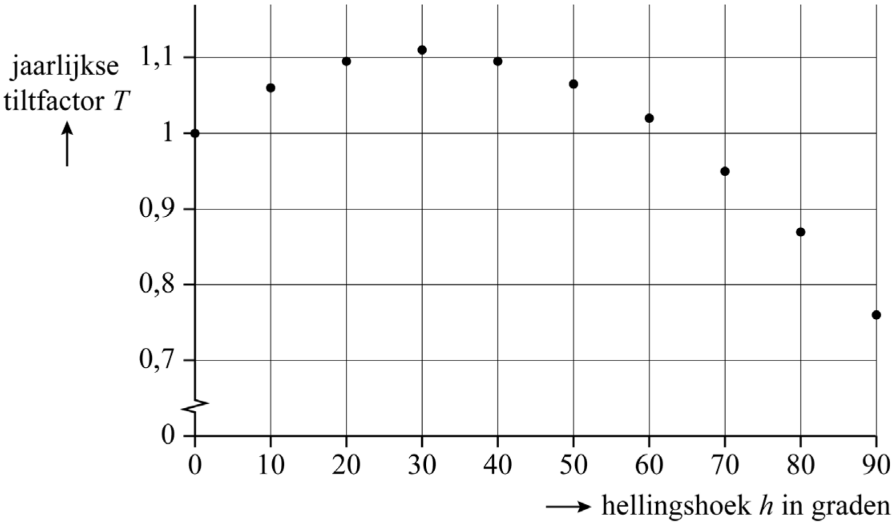
Zonnepanelen worden ten opzichte van de grond onder een bepaalde hellingshoek h geplaatst. Zie de foto.

foto



Om een verband te vinden tussen deze hellingshoek h en de hoeveelheid ontvangen energie, heeft een onderzoeker tien dezelfde zonnepanelen naast elkaar geplaatst, elk onder een verschillende hoek h.
Vervolgens heeft hij gemeten hoeveel energie elk zonnepaneel een jaar lang ontvangen heeft. Deze hoeveelheid per zonnepaneel heeft hij vergeleken met de hoeveelheid bij het zonnepaneel met $h = 0$.
De resultaten van zijn onderzoek zijn weergegeven in figuur 2.

figuur 2



In figuur 2 is af te lezen dat bij een hellingshoek van 30 graden de zogenaamde ‘tiltfactor’ 1,11 is. Dit betekent dat het zonnepaneel met $h = 30$ in een jaar tijd 11 procent meer energie heeft ontvangen dan het zonnepaneel met $h = 0$.

Het zonnepaneel met $h = 90$ heeft de minste energie ontvangen.

3p **12** Bereken met behulp van figuur 2 hoeveel procent minder energie dit zonnepaneel heeft ontvangen ten opzichte van de optimale situatie met $h = 30$. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Het verband tussen de tiltfactor T en de hellingshoek h in graden kan voor hellingshoeken tussen 0 en 50 graden benaderd worden door een formule van de vorm:

$$T = a \cdot h^2 + b \cdot h + 1 \qquad \text{(formule 2)}$$

Hierin zijn a en b constanten.

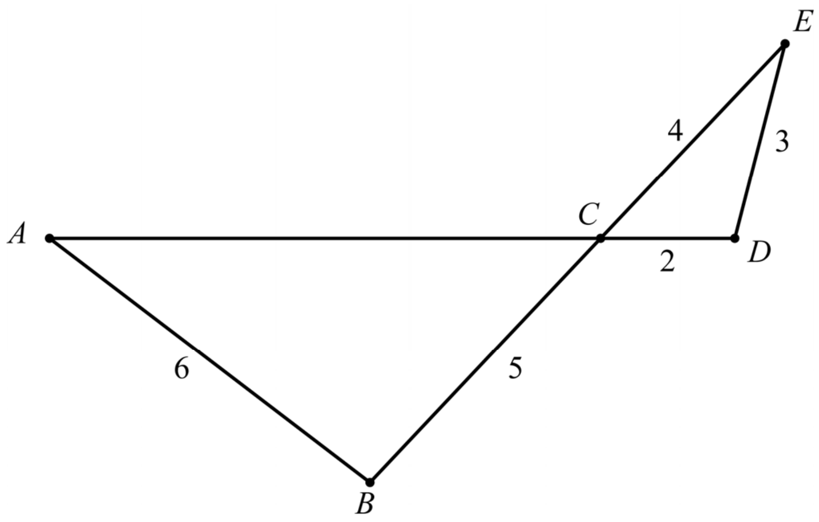
We nemen aan dat de grafiek die bij formule 2 hoort de top (30; 1,11) heeft. Op basis van alleen deze top liggen de waarden van a en b in formule 2 vast. (Verder lezen we dus geen punten af.)

5p **13** Bereken op algebraïsche wijze deze waarden van a en b.
Geef je eindantwoorden in vier decimalen.

Twee driehoeken

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 6$ en $BC = 5$.
Verder is gegeven driehoek CDE met $CD = 2$, $DE = 3$ en $CE = 4$.
Punt C is het snijpunt van lijnstuk AD en lijnstuk BE. Zie de figuur.

figuur



Zijde AC is de enige zijde waarvan de lengte onbekend is.

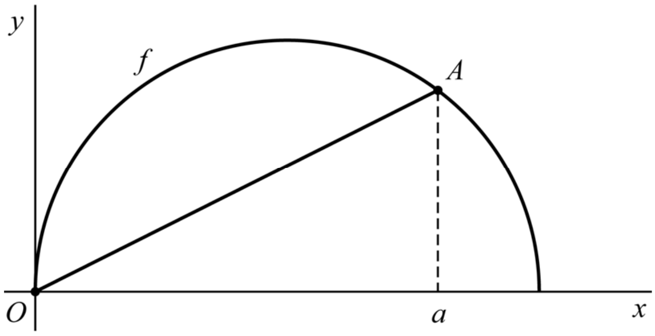
7p **14** Bereken op algebraïsche wijze de lengte van deze zijde AC. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Punten op een cirkelboog

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$.

Op de grafiek van f ligt een punt A met x-coördinaat a. De coördinaten van punt A zijn dus $\left(a, \sqrt{a(4-a)}\right)$. Tussen oorsprong O en punt A is een lijnstuk getekend. Zie figuur 1.

figuur 1

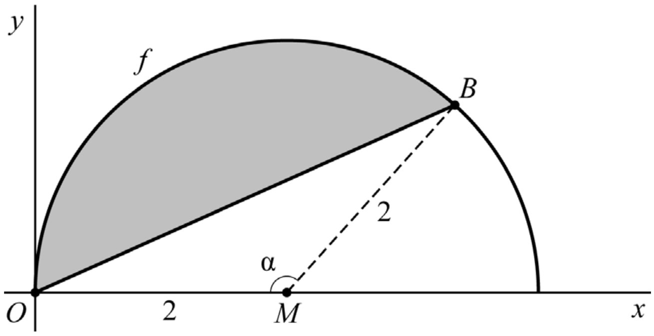


De helling van lijnstuk OA is $\frac{1}{2}$.

5p **15** Bereken exact de x-coördinaat van A.

De grafiek van f valt samen met de bovenste helft van een cirkel met middelpunt $M(2,0)$ en straal 2. In figuur 2 is de grafiek van f nogmaals weergegeven, maar nu met daarop een ander punt, punt B. Bovendien is hierin het gebied onder de grafiek van f én boven lijnstuk OB grijs gemaakt. Verder geldt $\alpha = \angle OMB$.

figuur 2



Voor de oppervlakte S van het grijze gebied geldt:

$S = 2\alpha - 2\sin(\alpha)$ met α in **radialen**

De positie van punt B is zo gekozen dat oppervlakte S de helft is van de oppervlakte van de halve cirkel.

5p **16** Bereken hoek α in **graden**. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.